Roll No. ..15131954...

U – 2630

B. Sc. (Fourth Semester)

EXAMINATION, May/June, 2018

MATHEMATICS

Paper – I

ABSTRACT ALGEBRA, ADVANCED CALCULUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, COMPLEX ANALYSIS

Time : Three Hours

Maximum Marks : 127 (For Regular Students)

Minimum Pass Marks : 34

Maximum Marks : 100 (For Private Students)

Minimum Pass Marks : 34

नोट- सभी प्रश्न हल कीजिए।

Attempt *all* questions.

1. निम्नलिखित प्रश्नों में से कोई **पाँच प्रश्न** हल कीजिए-

   Attempt any *five* questions from following–

P.T.O.

(i) समाकारिता की अष्टि एवं समूह का [illegible] परिभाषित कीजिए।

Define kernel of a Homomorphism and centre of a group.

(ii) सिद्ध कीजिए कि समूह G पर [illegible] सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध होता [illegible]

The relation of conju[illegible] equivalence relation [illegible]

(iii) शून्य भाजक रहित वलय उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

Define Ring without zero divisors with suitable example.

(iv) दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ उपवलय होता है।

The intersection of two subrings is a subring.

(v) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

(vi) सिद्ध कीजिए-

$$\overline{|(n)}\,\overline{|(1-n)} = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \quad 0<n<1$$

Prove that–

$$\overline{|(n)}\,\overline{|(1-n)} = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \quad 0<n<1$$

(vii) सम्बन्ध $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$ से स्वेच्छ फलन f का विलोपन करके अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए।

Form a partial differential equation by eliminating the function f from

$$z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right).$$

(viii) निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए-

(a) $xy\,s = 1$

(b) $t = \sin xy$

Solve the following differential equations–

(a) $xy = 1$

(b) $t = \sin xy$

(ix) दर्शाइए कि फलन $u = x^3 - 3xy^2$ एक प्रसंवादी फलन है।

Show that the function $u = x^3 - 3xy^2$ is harmonic.

(x) दर्शाइए कि फलन $f(z) = \bar{z}$ बिन्दु $z = 0$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

Show that the function $f(z) = \bar{z}$ is continuous at $z = 0$ but not differentiable.

नोट- निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक के कोई दो भाग हल कीजिए-

Attempt any *two* parts from each following questions–

2. (a) सिद्ध कीजिए कि $I(G) \cong G/Z$ जहाँ I (G) समूह G का आन्तरिक स्वाकारिताओं का समूह है तथा Z समूह G का केन्द्र है।

Prove that $I(G) \cong G/Z$ where I (G) is the set of all inner automorphism of a group G and Z is the center of group G.

(b) समूह का केन्द्र को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि समूह G का केन्द्र Z हमेशा G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Define center of a group and prove that the center Z of a group G is always a normal subgroup of G.

(c) परिमित आबेली समूह के लिये कॉशी प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's theorem for finite abelian group.

(d) यदि G एक परिमित समूह है तब

$$C_a = \frac{0(G)}{0(N(a))}$$ अन्य शब्दों में G में a के संयुग्मी अवयवों की संख्या G में a के प्रसामान्यक के सूचकांक के बराबर होता है।

If G is a finite group, then

$C_a = \dfrac{0(G)}{0(N(a))}$. In other words, the number of elements conjugate to a in G is the index of the normalizer of a in G.

3. (a) एक वलय R एक शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि R में गुणनात्मक निरसन नियमों का पालन होता है।

A ring R has no proper zero divisors if and only if the cancellation laws of multiplication hold in R.

(b) प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त क्षेत्र होता है।

Every finite integral domain is a field.

(c) किसी वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्याकारी होता है।

Every homomorphic image of a ring is isomorphic to some quotient ring.

(d) वलयों के समुच्चय में तुल्यकारिता सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध होता है।

In the set of rings, the relation isomorphism is an equivalence relation.

4. (a) u का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए जहाँ $u = \sin x \sin y \sin(x+y)$.

Find the maximum value of u where $u = \sin x \sin y \sin(x+y)$.

(b) बीटा फलन $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of Beta function $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$.

(c) दर्शाइए कि-

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma m \, \Gamma n}{\Gamma(m+n)} \quad (m,n>0)$$

Show that–

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma m \, \Gamma n}{\Gamma(m+n)} \quad (m,n>0)$$

(d) $\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(b+cx)^{n+1}} dx = \frac{1}{(b+c)^m b^n} \beta(m,n)$

5. (a) समीकरण $P+3q=5z+\tan(y-3x)$ को हल कीजिए।

Solve–

$$P+3q=5z+\tan(y-3x)$$

(b) समीकरण $x^2p^2+y^2q^2=z^2$ को हल कीजिए।

Solve–

$$x^2p^2+y^2q^2=z^2$$

(c) चारपिट विधि से पूर्ण हल ज्ञात कीजिए-

$$\left(p^2+q^2\right)y=qz$$

Find the complete solution by Charpit's method–

$$\left(p^2+q^2\right)y=qz$$

6

(d) समीकरण $(D^2 + 2DD' + D'^2)Z = e^{2x+3y}$ को हल कीजिए।

Solve the equation–

$$(D^2 + 2DD' + D'^2)Z = e^{2x+3y}$$

1. (a) दर्शाइए कि फलन $u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ प्रसंवादी है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

Show that the function $u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

(b) दर्शाइए कि फलन $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$ लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है तथा संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ ज्ञात कीजिए।

Prove that the function

$u = e^{x}(x\cos y - y\sin y)$ satisfies Laplace's equation and find the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.

(c) उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z_1 = 2, z_2 = i$ तथा $z_3 = -2$ को बिन्दुओं $w_1 = 1, w_2 = i$ तथा $w_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करता है।

Find the bilinear (Mobius) transformation which maps the points $z_1 = 2, z_2 = i$ and $z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1, w_2 = i$ and $w_3 = -1$.

(d) माना $z-$ समतल में स्थित चार बिन्दुओं z_1, z_2, z_3, z_4 के प्रतिबिम्ब एक मोबियस रूपान्तरण

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, (ad - bc \neq 0)$$

के अन्तर्गत w_1, w_2, w_3, w_4 है तब $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Let w_1, w_2, w_3, w_4 be the images of the four distinct points z_1, z_2, z_3, z_4 in the z–plane under a Mobius transformation

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, (ad - bc \neq 0)$$

then

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$