B.Sc. (Third Year) EXAMINATION, March/April-2023

MATHEMATICS

Paper-II

REAL AND COMPLEX ANALYSIS

Time : Three Hours

Max. Marks : 40 (For Regular Students)

Min. Pass Marks : 33%

Max. Marks : 50 (For Private Students)

Min. Pass Marks : 33%

नोट- सभी प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न क्रमांक **1** अनिवार्य है।
Attempt *all* questions. Question No. **1** is compulsory.

1. कोई **पाँच प्रश्न** हल कीजिए– $2\times5=10$
Attempt any *five* questions—
(i) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए–
(a) उपरिरीमान योग।
(b) रीमान समाकलन।

Define the following—
(a) Upper Riemann Sum.
(b) Riemann integral.

(ii) निम्न रीमान समाकल उपरिरीमान समाकल से बड़ा नहीं हो सकता सिद्ध कीजिए।
Prove that the lower Riemann integral cannot exceed the upper Riemann integral.

(iii) समाकल $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ के अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिए।
Test the convergence of the integral
$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

(iv) अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में सम फलन की फोरियर श्रेणी परिभाषित कीजिए।
Define fourier series for even function in the range $(-\pi, \pi)$.

(v) छद्म दूरीक समष्टि को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।
Define Pseudo metric space with example.

(vi) दूरीक समष्टि में प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।
Every cauchy sequence in a metric space is bounded.

https://www.jiwajionline.com

(vii) एक सम्मिश्र फलन $f(z)$ बिन्दु z_0 पर अवकलनीय है तो वह उस बिन्दु पर संतत भी है।

A complex function $f(z)$ is differentiable at z_0, then it is also continuous at that point.

(viii) दर्शाइए कि फलन $u = x^3 - 3xy^2$ प्रसंवादी फलन है तथा इसके संगत विश्लेषिक फलन ज्ञात कीजिए।

Show that the function $u = x^3 - 3xy^2$ is harmonic and find the corresponding analytic function.

(ix) घात श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$ की अभिसारिता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of convergence of the Power Series.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}.$$

(x) $\frac{z^2}{z^2 + a^2}$ का $z = ia$ पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

Find the residue of $\frac{z^2}{z^2 + a^2}$ at $z = ia$.

इकाई–I

(Unit-I)

2. मान लो $f : [a, b] \to R[a, b]$ पर एक परिबद्ध फलन है। तब f रीमान समाकलनीय है। यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिये $[a, b]$ के एक विभाजन σ का अस्तित्व इस प्रकार है कि— 6/8

$$U(f, \sigma) - \angle(f, \sigma) < \varepsilon$$

अर्थात् दोलायमान योग $\omega(f, \sigma) < \varepsilon$

Let $f : [a, b] \to R[a, b]$ be a bounded function on $[a, b]$. Then f is Riemann integrable if and only if given $\varepsilon > 0$ there exists a partition σ of $[a, b]$ such that

$$U(f, \sigma) - \angle(f, \sigma) < \varepsilon$$

i.e., the oscillatory sum

$$\omega(f, \sigma) < \varepsilon$$

अथवा

(Or)

यदि f अन्तराल $[0, a]$ में $f(x) = x^2$ से परिभाषित है तथा $a > 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $f \in R[0, a]$ तथा

$$\int_0^a f(x)\, dx = \frac{a^3}{3}$$

If f is defined by $f(x) = x^2$ on $[0, a]$ and $a > 0$ then prove that $f \in R[0, a]$ and

$$\int_0^a f(x)\, dx = \frac{a^3}{3}$$

इकाई-II
(Unit-II)

3. समाकलन $\int_0^1 x^{n-1} \log x \, dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए। 6/8

Test the convergence of

$$\int_0^1 x^{n-1} \log x \, dx$$

अथवा

(Or)

फलन $f(x) = x \cos x$ के लिये अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फोरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए।

Obtain Fourier's series in the interval $(-\pi, \pi)$ for the function $f(x) = x \cos x$.

इकाई-III
(Unit-III)

4. दूरीक समष्टि में प्रत्येक सामीप्य एक विवृत समुच्चय है। 6/8

In a metric space every neighbourhood is an open set.

अथवा

(Or)

कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कॉशी होता है। परन्तु विलोम सत्य नहीं है।

Define Cauchy sequence, and prove that every convergent sequence in a metric space is a cauchy sequence but converse is not true.

इकाई-IV
(Unit-IV)

5. दर्शाइए कि फलन $u = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$ प्रसंवादी है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए। 6/8

Show that the function $u = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

अथवा

(Or)

दर्शाइए कि फलन $f(z) = e^{-z^{-4}}$ $(z \neq 0)$ बिन्दु $z = 0$ पर विश्लेषिक नहीं है। यद्यपि उस बिन्दु पर कॉशी रीमान समीकरण सन्तुष्ट होता है।

Show that the function $f(z) = e^{-z^{-4}}$ $(z \neq 0)$ is not analytic at $z = 0$ althougth Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point.

इकाई–V
(Unit-V)

6. $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-3z+2)}$ का प्रसार निम्न क्षेत्रों में कीजिए— 6/8

(a) $0<|z|<1$

(b) $1<|z|<2$

Expand $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-3z+2)}$ for the regions—

(a) $0<|z|<1$

(b) $1<|z|<2$.

अथवा

(*Or*)

कंटूर समाकलन विधि से सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Prove that by Cantour integration method—

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4}.$$

