

**B.Sc. (Third Year) EXAMINATION,
March/April 2022
MATHEMATICS**

Paper-II

REAL AND COMPLEX ANALYSIS

Time : Three Hours

Max. Marks : 40 (For Regular Students)

Min. Pass Marks : 33%

Max. Marks : 50 (For Private Students)

Min. Pass Marks : 33%

नोट- सभी प्रश्न हल कीजिये। प्रश्न क्रं. 1 अनिवार्य है।
Attempt *all* questions. Question No. 1 is compulsory.

1. कोई पाँच भाग हल कीजिये—

Attempt any *five* parts—

- (i) यदि $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ परिबद्ध है तथा $P [a, b]$ का कोई विभाजन है, तब $L(P, f) \leq U(P, f)$ सिद्ध कीजिये।

P.T.O.

Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded function and P is any partition of $[a, b]$, then $L(P, f) \leq U(P, f)$ prove that.

- (ii) यदि $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4 + 1}$ तो $f_x(1, 2)$ ज्ञात कीजिये।

If $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4 + 1}$ then find $f_x(1, 2)$.

- (iii) समाकल $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^3} dx$ के अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिये।

Test the convergence of the integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^3} dx$$

- (iv) 2π आवर्तक सहित फलनों की फोरियर श्रेणी परिभाषित कीजिये।

Define Fourier Series of functions with period 2π .

- (v) साधारण दूरिक समष्टि को उदाहरण सहित परिभाषित करो।

Define usual metric space with example.

- (vi) किसी दृष्टिक समष्टि में प्रत्येक अभिगम अनुक्रम एक कॉशी अनुक्रम होता है। सिद्ध कीजिये।

Prove that Every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence.

- (vii) सिद्ध कीजिये यदि एक समिश्र फलन $f(z)$ बिन्दु z_0 पर अवकलनीय है तो वह उस बिन्दु पर संतत भी है।

Prove that if a complex function $f(z)$ is differentiable at z_0 then it is also continuous at that point.

- (viii) सिद्ध कीजिये $u = x^3 - 3xy^2$ हार्मोनिक फलन है।

Prove that $u = x^3 - 3xy^2$ is Harmonic function.

- (ix) घात श्रेणी का वैश्लेषिक फलन में निरूपण कीजिये।

Power Series representation of an Analytic function.

P.T.O.

- (x) विलक्षणता एवं परिरेखा समाकलन परिभाषित कीजिये।

Define Singularities and Contour Integration.

इकाई-I

(Unit-I)

2. सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक संतत फलन रीमान समाकलनीय होता है।

Prove that every continuous function defined on $[a, b]$ is Riemann integral.

अथवा

(Or)

दशाईये फलन $f(x, y) = \sin x + \cos y$ सर्वत्र अवकलनीय है।

Show that the function $f(x, y) = \sin x + \cos y$ is differentiable everywhere.

इकाई-II

(Unit-II)

3. दशाईये $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ अभिसारी है।

Show that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ is divergent.

(5)

Z - 710

अथवा

(Or)

अन्तराल $-\pi < x < \pi$ में फलन $f(x) = |x|$ के लिये फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिये।

Find the Fourier Series of the function $f(x) = |x|$ in the interval $-\pi < x < \pi$.

इकाई-III

(Unit-III)

4. सिद्ध कीजिये किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space every closed sphere is closed set.

अथवा

(Or)

R में आर्किमिडीज गुणधर्म का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove Archimedean Property in R.

इकाई-IV

(Unit-IV)

5. कॉशी समाकलन सूत्र का कथन लिखो एवं सिद्ध करो।

State and prove Cauchy Integral Formula.

P.T.C

(6)

Z - 710

अथवा

(Or)

दशाईये कि फलन $e^x (\cos y + i \sin y)$ विश्लेषिक है तथा इसका अवकलज ज्ञात कीजिये।

Show that the function $e^x (\cos y + i \sin y)$ is analytic and find its derivative.

इकाई-V

(Unit-V)

6. लारेंट श्रेणी में $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ का प्रसार निम्न क्षेत्रों में कीजिये—

(i) $|z| < 1$.

(ii) $1 < |z| < 3$.

Expand $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ in a Laurent's

Series valid for—

(i) $|z| < 1$.

(ii) $1 < |z| < 3$.

(7)

Z - 710

अथवा

(Or)

कॉशी अवशेष प्रमेय के उपयोग से समाकल

$\int_c \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ का मान ज्ञात कीजिये जहाँ c वृत्त है।

जिसका केन्द्र मूल बिन्दु तथा त्रिज्या 2 है।

Find the value of integral $\int_c \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ by

using of Cauchy's Residue Theorem. where c is circle which centre is original point and radius is 2.

<https://www.jiwajionline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

<https://www.jiwajionline.com>