Roll No. ....

A – 535

B.Sc. (Second Year) EXAMINATION, March/April-2023

Major

MATHEMATICS

Paper-I

ABSTRACT ALGEBRA AND LINEAR ALGEBRA

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

खण्ड 'अ'

(Section 'A')

नोट- कोई **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। 3×2=6

Attempt any *three* questions.

1. बृम्हगुप्त की संक्षिप्त जीवनी लिखिये।

Write a brief biography of Brahmagupta.

2. मान लो $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ और $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

घात 3 के दो क्रमचय हैं तब दर्शाइये कि

$$fg \neq gf$$

Let $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

are two permutations of degree 3. Then show that

$$fg \neq gf$$

3. यदि वलय में एक वाम तत्समक दक्षिण तत्समक भी है, तो सिद्ध करो कि दोनों बराबर हैं।

If in a ring left identity is also right identity then prove that both are equal.

4. सदिश समष्टि $V_3(R)$ में सिद्ध कीजिए कि सदिश $(1, 2, 0)$, $(0, 3, 1)$ तथा $(-1, 0, 1)$ रैखिकत: स्वतन्त्र हैं।

In $V_3(R)$, where R is the field of real numbers then prove that vectors $(1, 2, 0)$, $(0, 3, 1)$ and $(-1, 0, 1)$ are linerly independent.

5. सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f : V_3(R) \to V_2(R)$ जो कि $f(a, b, c) = (c, a + b)$ से परिभाषित है, रैखिक है।

Prove that the mapping $f : V_3(R) \to V_2(R)$ defined as below :

$f(a, b, c) = (c, a + b)$ is linear.

https://www.jiwajionline.com

खण्ड 'ब'

(Section 'B')

नोट– कोई चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए– $4 \times 9 = 36$

Attempt any *four* questions.

1. दिखाइये कि समूह G आबेली होगा यदि और केवल यदि $a, b \in G$ के लिए

$$(ab)^2 = a^2 b^2$$

Show that a group G is abelian if and only if **for $a, b \in G$**

$$(ab)^2 = a^2 b^2$$

2. यदि $f : G \to G'$, समूह G से समूह G' पर एक समाकारिता है, जिसकी अष्टि (Kernel) K है, तब K, समूह G का प्रसामान्य उपसमूह *(Normal Subgroup)* है।

If $f : G \to G'$ is a homomorphism of group G into a group G', then Kernel K, of f is a normal subgroup of G.

3. यदि R एक वलय इस प्रकार है कि

$$a^2 = a, \forall a \in R$$

तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $a + a = 0, \forall a \in R$

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b; b \in R$

(iii) R एक क्रमविनिमेय वलय है।

If R is a ring such that

$$a^2 = a, \forall a \in R \text{ then}$$

Prove that

(i) $a + a = 0, \forall a \in R$

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b; b \in R$

(iii) R is a commutative ring.

4. दो उपसमष्टियों का संघ (union) एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि (if and only if) एक दूसरे में अन्तर्विष्ट होते हैं।

The union of two subspace is a subspace if *and only if* one is contained in the other.

5. माना कि R^3 पर T रैखिक संकारक है, जो $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, - x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ से परिभाषित है। आधार $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, जहाँ $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let T be a linear operator on R^3 defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, - x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ Determine the matrix of T relative to ordered basis $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ where $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$.

खण्ड 'स'

(Section 'C')

नोट– कोई भी दो प्रश्न हल कीजिए– $2 \times 14 = 28$

Attempt any *two* questions—

1. यदि Q^+ सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय (Set of positive rational numbers) है और Q^+ में $*$ द्विआधारी संरचना है जो निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$a * b = \frac{ab}{3}, a, b \in Q^+$$

दिखाइये कि $(Q^+, *)$ एक आबेली समूह है। समूह का तत्समक ज्ञात कीजिए।

If Q^+ be the set of all positive rational numbers and $*$ be a binary composition in Q^+ defined by

$$a * b = \frac{ab}{3}, a, b \in Q^+$$

Show that $(Q^+, *)$ is an abelian group. Find the identity of the group.

P.T.O.

2. गुणनात्मक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$ से तुल्याकारी नियमित क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए।

Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$.

3. एक वलय R शून्य भाजक रहित है, यदि और केवल यदि R में निरसन नियम सत्य है।

A ring R is without zero divisors if and only if the cancellation laws hold in R.

4. किसी सदिश समष्टि V(F) का अरिक्त उपसमुच्चय W, V(F) की सदिश उपसमष्टि होगा यदि और केवल यदि :

(i) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

For any non-empty subset W of a vector space V(F) to be a subspace of V if and only if:

(i) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

5. आव्यूह A के आयगेन मान (Eigen value) व संगत आयगेन सदिश (Eigen Vector) ज्ञात कीजिए।

जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix A

where

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$