

Roll No.

Z - 590-S

**B.Sc. (Second Year) (Suppl.)
EXAMINATION, Sept./Oct.-2022**

MATHEMATICS

Paper-II

ADVANCED CALCULUS

Time : Three Hours

Max. Marks : 40 (For Regular Students)

Min. Pass Marks : 33%

Max. Marks : 50 (For Private Students)

Min. Pass Marks : 33%

नोट- प्रत्येक प्रश्न के कोई भी दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

1. (a) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है। 4/5
Prove that every convergent sequence of real numbers is bounded. However, its converse is not true in general.

P.T.O.

(2)

Z - 590-S

- (b) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए— 4/5

$$x + \frac{2^2 x^2}{|2|} + \frac{3^3 x^3}{|3|} + \frac{4^4 x^4}{|4|} + \dots; x > 0$$

Test the convergence of the following series—

$$x + \frac{2^2 x^2}{|2|} + \frac{3^3 x^3}{|3|} + \frac{4^4 x^4}{|4|} + \dots; x > 0$$

- (c) दर्शाइये कि निम्नलिखित श्रेणी प्रतिबन्धी अभिसारी है— 4/5

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Show that following series is conditionally convergent—

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. (a) सिद्ध कीजिए कि यदि कोई फलन एक संवृत अन्तराल में संतत हो तो यह फलन इस अन्तराल में परिबद्ध होता है। 4/5

Prove that if the function is continuous on a closed interval then it is bounded on this interval.

(3)

Z - 590-S

(b) दर्शाइये कि फलन $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \infty)$ अन्तराल $(0, \infty)$ पर एकसमान संतत है। 4/5
Show that the function $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \infty)$ is uniformly continuous on $(0, \infty)$.

(c) दर्शाइये कि $\log(1+x)$, प्रत्येक $x > 0$ के लिए $x - \frac{x^2}{2}$ और $x - \frac{x^2}{2(1+x)}$, $\forall x > 0$ के मध्य स्थित है। 4/5

Show that $\log(1+x)$ lies between

$$x - \frac{x^2}{2} \text{ and } x - \frac{x^2}{2(1+x)}, \forall x > 0.$$

3. (a) दर्शाइए कि निम्नलिखित फलन मूल बिन्दु पर संतत है— 4/5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Show that following function is continuous at the origin—

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) यदि $u = x \phi(y/x) + \psi(y/x)$ तो सिद्ध कीजिए कि 4/5

P.T.O.

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

If $u = x \phi(y/x) + \psi(y/x)$ then prove that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(c) फलन $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ का $(x-2)$ और $(y-3)$ के घातों में टेलर प्रमेय से प्रसार कीजिए। 4/5

Expand function $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ in powers of $(x-2)$ and $(y-3)$ by Taylor's theorem.

4. (a) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए। 4/5

Find the evolute of the hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(b) $x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए जबकि यह दिया है कि 4/5

$$ax + by + cz = p.$$

Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ having given that $ax + by + cz = p$.

(c) $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

अतः $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4/5

Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ in terms of the beta function and hence evaluate

$$\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx.$$

5. (a) मूल्यांकन कीजिए— 4/5

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dx \, dy \, dz$$

Evaluate—

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dx \, dy \, dz$$

(b) सिद्ध कीजिए कि वक्र $(a-x)y^2 = a^2x$ को इसके अनंत स्पर्शी के परितः घुमाने से जनित

वोस का आयतन $\frac{1}{2} \pi^2 a^3$ होता है। 4/5

Show that the volume of the solid generated by the revolution of the curve $(a-x)y^2 = a^2x$ about its asymptote is $\frac{1}{2} \pi^2 a^3$.

(c) $\int_0^a \int_{m_1}^{m_2} V \, dx \, dy$ के समाकलन के क्रम को परिवर्तित कीजिए। 4/5

Change the order of integration of

$$\int_0^a \int_{m_1}^{m_2} V \, dx \, dy.$$