

नोट- प्रत्येक प्रश्न के कोई भी दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any two parts from each question.

All questions carry equal marks.

1. (a) अभिसरण के लिए कौशी के सिद्धान्त का प्रयोग करके दर्शाइये कि अनुक्रम  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ , जहाँ

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

अभिसारी नहीं है। 4/5

P.T.O.

By using Cauchy's general principle of convergence, show that the sequence

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ , where

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

cannot converge.

- (b) कौशी समाकल परीक्षण से दर्शाइये कि श्रेणी-

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

अभिसारी है अथवा अपसारी। 4/5

Test the convergence of the following series by Cauchy's integral test

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

is convergent or divergent.

- (c) दर्शाइये कि श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n^2+1} - n]$  अभिसारी है, परन्तु निरपेक्षतः अभिसारी नहीं है।

4/5

Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n^2+1} - n] \text{ is convergent}$$

but is not absolutely convergent.

2. (a) फलन  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$  का संवृत अंतराल  $[0, 1]$  पर एकसमान सांतत्य का परीक्षण कीजिए। 4/5  
Test the uniform continuity of the function  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$  on the closed interval  $[0, 1]$ .

- (b) माध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए 4/5

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad x > 0$$

By mean value theorem, prove that

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad x > 0$$

- (c) यदि  $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ ,  $x \neq 0$ ,

$f(0) = 0$  तो दिखाईए कि  $f(x)$ ,  $x = 0$  पर संतत है किन्तु  $f'(0)$  विद्यमान नहीं है। 4/5

If  $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ ,  $x \neq 0$  and  $f(0) = 0$ ,

then show that the function is continuous but not differentiable at  $x = 0$ .

P.T.O.

3. (a) दिखाईए कि फलन  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  जो निम्नवत् परिभाषित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$  पर संतत है। 4/5

Show that the function  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at the origin  $(0, 0)$ .

- (b) यदि  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$  तब दिखाईए कि 4/5

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x+y+z)^2}$$

If  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$  then show that

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x+y+z)^2}$$

(c) यदि

$$y_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, y_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, y_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

तो सिद्ध कीजिए कि 4/5

$$J(y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4.$$

If

$$y_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, y_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, y_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

then prove that

$$J(y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4.$$

4. (a) समीकरण  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$  से निरूपितवक्र-कुल के अन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ  $\alpha$  प्राचल है। 4/5

Obtain the envelope of the family of curves given by

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1, \text{ where } \alpha \text{ is the}$$

paramater.

P.T.O.

(b) फलन  $x^3 y^2 (1 - x - y)$  के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान प्राप्त कीजिए। 4/5

Find the maximum or minimum values of the function

$$x^3 y^2 (1 - x - y).$$

(c) सिद्ध कीजिए कि 4/5

$$(i) \sqrt[n]{n} \sqrt[1-n]{1-n} = \frac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1$$

$$(ii) \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

Prove that

$$(i) \sqrt[n]{n} \sqrt[1-n]{1-n} = \frac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1$$

$$(ii) \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

5. (a) परवलय  $y = x^2$  तथा रेखा  $y = x$  के मध्य क्षेत्रR पर  $\iint_R xy(x+y) dx dy$  का मान ज्ञात कीजिए। 4/5Let R be the region between the parabola  $y = x^2$  and straight line  $y = x$ ,then evaluate  $\iint_R xy(x+y) dx dy$ .

- (b) वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  को X-अक्ष के परितः घुमाने से बने ठोस का वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

4/5

Find the curved surface of the solid generated by revolution of the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

- (c) समाकल  $\int_0^{\infty} \int_0^x x e^{-x^2/y} dx dy$  का मूल्यांकन उसके क्रम को परिवर्तित कर कीजिए। 4/5

Evaluate the integral

$$\int_0^{\infty} \int_0^x x e^{-x^2/y} dx dy$$

By change the order of integration.

<https://www.jiwajionline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से