Roll No. ....

Z – 589-S

B.Sc. (Second Year) (Suppl.)
EXAMINATION, Sept./Oct.-2022

MATHEMATICS

Paper-I

ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three Hours

Max. Marks : 40 (For Regular Students)

Min. Pass Marks : 33%

Max. Marks : 50 (For Private Students)

Min. Pass Marks : 33%

नोट- **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रश्न क्रमांक **एक** से कोई **पाँच** भाग हल कीजिए।

All questions are compulsory. Attempt any *five* parts from question No. 1.

1. किन्हीं **पाँच** भागों को हल कीजिए– $2\times5=10$

Attempt any *five* parts—

(i) आबेली समूह को परिभाषित कीजिए।

Define abelian group.

(ii) सिद्ध कीजिए प्रत्येक $a, b \in G$

$$(aob)^{-1} = b^{-1}oa^{-1}$$

Prove that for all $a, b \in G$

$$(aob)^{-1} = b^{-1}oa^{-1}$$

(iii) सह समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Define Cosets.

(iv) समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ, प्रसामान्य उपसमूह होता है।

The intersection of two normal subgroup is a normal subgroup.

(v) यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ और

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ तो AB और BA

ज्ञात कीजिए दिखाइए कि

$$AB \neq BA$$

If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ and

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ then find AB

and BA, Show that $AB \neq BA$.

(vi) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए—

(a) समूहों की तुल्यकारिता।

(b) क्रमचय समूह।

Define the following—

(a) Isomorphism of groups.

(b) Permutation groups.

(vii) समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।

Define Kernel of a Homomorphism.

(viii) समूह समाकारिता $f : G \to G'$ एक तुल्यकारी है यदि और केवल यदि $\text{Ker} f = \{e\}$.

A homomorphism f of a group G into a group G' *i.e.* $f : G \to G'$ is a isomorphism iff $\ker f = \{e\}$.

(ix) दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ उपवलय होता है।

The intersection of two subrings is a subring.

(x) गुणजावली को परिभाषित कीजिए।

Define Ideal.

इकाई-I

(Unit-I)

2. दिखाइए कि 1 के अतिरिक्त सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q_1 संक्रिया * जो निम्न प्रकार से परिभाषित है 6

$$a * b = a + b - ab \ \forall \ a, b \in Q_1$$

Show that Q_1 the set of all rational numbers without 1 by the operation * define by

$$a * b = a + b - ab \ \forall \ a, b \in Q_1$$

अथवा

(Or)

मान लो H, G का अरिक्त उपसमुच्चय है तो H, G का उपसमूह होगा यदि और केवल यदि

$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ जहाँ b^{-1}, G में b का प्रतिलोम है।

Let H be a non-empty subset of a group G. Then H is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ where b^{-1} is the inverse of b in G.

इकाई-II

(Unit-II)

3. परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि कोटि का भाजक होता है। 6

The order of each subgroup of a group is a divisor of the order of the finite group.

अथवा

(*Or*)

मान लो H, समूह G का उपसमूह है तो H के G में कोई दो वाम (दक्षिण) सह समुच्चय या तो संपाती हैं या असंयुक्त हैं।

Let H be a subgroup of a group G. Then any two lef (Right) cosets of H in G are either identical or disjoint.

इकाई-III

(Unit-III)

4. कोटि n का प्रत्येक परिमित समूह n-प्रतीकों के क्रमचय समूह से तुल्याकारी होता है। 6

Each finite group of order n is isomorphic to permutation group on n symbols.

अथवा

(*Or*)

n-प्रतीकों पर $\underline{|n}$ क्रमचयों से $\frac{\underline{|n}}{2}$ सम होते हैं और $\frac{\underline{|n}}{2}$ विषम होते हैं।

Of the $\underline{|n}$ permutations on n-symbols, $\frac{\underline{|n}}{2}$ are even and $\frac{\underline{|n}}{2}$ are odd.

इकाई-IV

(Unit-IV)

5. माना G एक परिमित आबेली समूह है, P अभाज्य संख्या है और P/O(G) तब यहाँ एक अवयव $a \neq e \in G$ का अस्तित्व इस प्रकार से होगा कि 6

$$a^P = e$$

Let G be a finite abelian group, P is prime and P/O(G) [*i.e.*, P is divisor of O(G)]. Then there is an element $a \neq e \in G$ such that

$$a^P = e$$

अथवा

(*Or*)

समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि समूह G का केन्द्र Z हमेशा G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Define center of a group, and prove that the center Z of a group G is always a normal subgroup of G.

इकाई-V
(Unit-V)

6. वलयों की समाकारिता के लिये मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए। 6

State and prove fundamental theorem on homomorphism rings.

अथवा

(*Or*)

प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Every finite integral domain is a field.