Roll No.

V - 289

B. Sc. (Second Year)

EXAMINATION, 2019

MATHEMATICS

Paper - I

ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three Hours

Maximum Marks : 40 (For Regular Students)

Minimum Pass Marks : 33%

Maximum Marks : 50 (For Private Students)

Minimum Pass Marks : 33%

नोट- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रश्न क्रमांक एक से कोई पाँच भाग हल कीजिए।

All questions are compulsory. Attempt any *five* parts from question no. 1.

1. किन्हीं पाँच भागों का हल कीजिए। 2×5 = 10

Attempt any *five* parts-

(i) यदि $(Q^+, *)$ द्विआधारी संक्रिया * जो कि

$$a*b = \frac{ab}{3}, a,b \in Q^+$$ द्वारा परिभाषित

P.T.O.

है, के सापेक्ष समूह है, तो इस समूह का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

If $(Q^+, *)$ be a group with respect to the binary operation '*' defined as $a*b = \frac{ab}{3}, a,b \in Q^+$ then find the identity of the group.

(ii) यदि समूह G इस प्रकार है कि $(ab)^2 = a^2b^2 \ \forall a,b \in G$ तो सिद्ध कीजिए कि G आबेली है।

Show that a group G is abelian if $(ab)^2 = a^2b^2 \ \forall a,b \in G$.

(iii) किसी समूह G में उसके उपसमूह H का वाम एवं दक्षिण सहसमुच्चय परिभाषित कीजिए।

Define left and right coset of a subgroup H in group G.

(iv) किसी समूह G का प्रसामान्य उपसमूह परिभाषित कीजिए।

Define normal subgroup of group G.

(v) यदि R योग के सापेक्ष सभी वास्तविक संख्याओं का समूह तथा R_0 गुणन के सापेक्ष अशून्य वास्तविक संख्याओं का समूह है ...

$f: R \to R_0$ में $f(x) = 2^x, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है तो सिद्ध करो f एक समाकारिता है।

If R is the group of all real numbers under addition and R_0 be the multiplicative group of non-zero real numbers and $f: R \to R_0$ defined by $f(x) = 2^x, \forall x \in R$ then show that f is homomorphism.

(vi) यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

तथा $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

तो ज्ञात करो AB तथा BA.

If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

and $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

then find AB and BA

(vii) किसी समूह की स्वकारिता को परिभाषित कीजिए।

Define Automorphism of a group.

(viii) एक समूह में संयुग्मी अवयव एवं संयुग्मिता सम्बन्ध परिभाषित कीजिए।

Define conjugate elements and conjugacy relation in a group.

(ix) उपवलय को परिभाषित कीजिए।

Define subring.

(x) वलय समाकारिता को परिभाषित कीजिए।

Define Ring Homomorphism.

2. (a) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$ योग मॉड्यूलो n के सापेक्ष एक समूह है। 3

Prove that the set $\{0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1)\}$ of n elements is a group under addition modulo n.

(b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह आबेली है।

Prove that every cyclic group is abelian.

अथवा

(Or)

माना H, किसी समूह G का एक अरिक्त उपसमूह है। तब H, G का एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ जहाँ b^{-1}, b का G में प्रतिलोम है।

Let H be a non-empty subset of a group G. Then, H is a subgroup of G if and only if

$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ where b^{-1} is the inverse of b in G.

3. माना H, एक समूह G का उपसमूह है। तब सिद्ध कीजिए कि G में H के दो वाम (दक्षिण) सह समुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या असंयुक्त। 6

Let H be a subgroup of a group G. Then any two left (right) cosets of H in G are either identical or disjoint.

अथवा

(Or)

लैंग्राज प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

4. समूह में समाकारिता की मूल प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए। 6

State and prove fundamental theorem of Homomorphism of group.

अथवा

(Or)

सिद्ध कीजिए कि n चिन्हों के $\lfloor n$ क्रमचयों में $\frac{\lfloor n}{2}$ सम तथा $\frac{\lfloor n}{2}$ विषम क्रमचय होते हैं।

Prove that, of the $\lfloor n$ permutations on n-symbols, $\frac{\lfloor n}{2}$ are even and $\frac{\lfloor n}{2}$ are odd.

5. सिद्ध कीजिए कि एक समूह G की सभी आन्तर स्वकारिताओं का समुच्चय I (G), G की सभी स्वकारिताओं के समूह A (G) का उपसमूह होता है। 6

Prove that the set I (G) of all inner automorphisms of a group G is a normal subgroup of the group A (G) of all automorphisms of G.

अथवा

(Or)

माना G एक परिमित समूह है तो सिद्ध कीजिए कि

$$C_a = \frac{0(G)}{0[N(a)]}$$ अर्थात

$a \in G$ के संयुग्मी अवयवों की संख्या a के प्रसामान्यक $N(a)$ की G में कोटि के बराबर होती है।

Let G be a finite group. Then prove that–

$$C_a = \frac{0(G)}{0\{N(a)\}} \text{ i. e.}$$

the number of elements conjugate to $a \in G$ is the index of the normalizer of a in G.

6. सिद्ध कीजिए कि वलय R शून्य भाजक रहित होता है यदि और केवल यदि R में गुणा का निरसन नियम सत्य होता है। 6

Prove that, a ring R is without zero divisors if and only if the cancellation law of multiplication hold in R.

अथवा

(*Or*)

सिद्ध कीजिए कि एक वलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी एक गुणजावली होता है।

Prove that intersection of two ideals of a ring in an ideal.